

Jan Wyrndhamn Eva Riesbeck Jan Schoultz

Problemlösning som metafor och praktik

Studier av styrdokument och klassrumsverksamhet i
matematik- och teknikundervisningen.



LINKÖPINGS UNIVERSITET

Institutionen för tillämpad lärarkunskap
Linköping 2000

DEL 2

VÅRA LÄROPLANER OCH MATEMATIKÄMNET

Den första anhalten för vår resa på jakten efter vad problemlösning står för i olika sammanhang blev granskningen av vissa dokument som "styr" skolan. Vi valde att i första hand studera vad som kan utläsas ur läroplaner, kursplaner och betygskriterier beträffande problemlösning i matematik. För att få perspektiv på dagens läroplan för grundskolan ägnades viss uppmärksamhet åt tidigare läroplaner och några viktigare dokument för grundskolans framväxt. För denna läsning redogörs i delrapporten *Från räkning till matematik*. Här återges vissa delar av rapporten. Dessa har bearbetats något för att passa in i framställningen.

Vi har bestämt oss för att först ge en allmän bakgrund om läroplaner och läroplansteori. Vi tar också upp det som vi ser som grundskolans stora dilemma – att verkställa det motstridiga samhällsupdraget att både socialisera och kvalificera. Problemet uppmärksammas i ett rent teoretiskt sammanhang. Men så här i efterhand förstår vi också att det är ett stort reellt problem för lärarna på fältet, vilket vi senare återkommer till. I de följande delkapitlen diskuteras skolans mål för matematikämnet och hur dessa påverkar synen på problemlösning. Diskussionsavsnittet har kompletterats med iakttagelser som vi senare gjort under resans gång och som hör hemma här. Vi ser därvid de aktuella texterna som figurer mot en postmodernistisk bakgrund.

Allmän bakgrund

Att säga att skolan – liksom för övrigt all utbildning – i dagsläget befinner sig i en tydlig förändringsfas är egentligen inte något nytt. Skolan är och har alltid varit skottavla för olika synpunkter, uppfattningar och tyckanden och därmed också utsatts för omdanningar. För att diskussionen om olika omställningar ska bli meningsfull är det av största betydelse att olika utvecklingsstendenser synliggörs och studera hur de beskrivs och sedan värderas. Vi vill gärna framhålla och skildra skeendet som präglat av en motsättning mellan moderna och postmoderna tankegångar.

I Richardson (1997) levandegörs den svenska grundskolans utveckling under ett halvsekel (efterkrigstiden) genom texter skrivna av skolans främsta aktörer (skolministern, riksdagsmän och chefer för Skolöverstyrelsen). Två processer är lätta att spåra och följa. Båda bär stark ideologisk prägel och handlar om relationen mellan individ, samhälle och stat men gäller helt skilda saker: *skolans mål* och *skolans styrning*.

Beträffande *skolans mål* kan utvecklingen enklast beskrivas som från synen på skolan som "en spjutspets mot framtiden" till en betoning av det "individuella livsprojektet" (Hedman, 1997). Under 1950-, 1960- och 1970-talen sågs skolan från officiellt håll som instrument för samhällsförändring bort från klassbarriärer och till demokrati, rättvisa och jämlikhet. Under 1980- och 1990-talen sker en förskjutning i värden med starkare betoning på individen och individualiteten. Valfrihet, variation och mångfald är några av de ord som används i dagens skoldiskurs. Englund (1996) ser de utbildningspolitiska förändringarna som en övergång från skolan som samhällelig till privat angelägenhet, från gemensam medborgarutbildning till privatserad utbildning.

Under de senaste decennierna har villkoren för skolans styrning förändrats på ett genomgripande sätt mot ökad decentralisering. I flera steg sedan 1970-talet har en betydande del av ansvaret för skolans verksamhet och utveckling förts över från staten till kommunerna, till rektorsområdena, till skolenheterna och till den professionella personalen. Skolan är inte längre detaljreglerad. I skollagen kungörs de övergripande målen och bestämmelserna för skolan. Den nationella styrningen sker vidare genom de mål som anges i läroplaner och kursplaner och dessutom genom nationellt fastställda betygssystem. Målstyrningen bygger på ett åsiktjämmande mellan målen (vad och varför) och processen (hur), sättet att arbeta, för att nå målen. Den nya styrningen betyder att man lokalt måste tolka de nationella målen och välja innehåll, arbetsätt osv. – denna typ av styrning benämns deltagande målstyrning. Med den distinktion som Lindensjö & Lundgren (1986) gör mellan *formuleringsarena* (där inriktning och mål formuleras) och *realiseringsarena* (där verksamheten genomförs) kan sägas att avståndet mellan dessa arenor minskat samtidigt som fler mer eller mindre officiella arenor tillkommit. Skolan har därmed åtminstone på papperet fått ett allt större firrum (jämför även Berg & Wallin, 1983).

Om läroplanskoder

Bland styrdokumentet inlar läroplanen och kursplanerna en särställning; tillsammans utgör de det viktigaste samhälleliga och politiska styckprogrammet för utbildningen. I läroplanen återfinns svar på en rad spörsmål som

- *Vad kan vi veta?*
- *Vilket vetande behövs ur den enskilde individens horisont och för samhällets förbestånd?*
- *Hur ska detta vetande organiseras för undervisning?*
- *Varför ska ett visst vetande väljas ut och inte annat möjligt vetande?*

Entydiga svar på sådana frågor finns dock inte. Läroplanen kommer därför att återspegla olika politiska intressens uppfattning. Skolan och undervisningen är genomsvad av olika grundläggande värderingar och i den utbildningspolitiska retoriken blandas därför

begrepp som kan relateras till olika tidsskeden. Vissa idéer, uppfattningar och föreställningar om skolan står sig över tid medan andra är mer dagsländebetonade. En läroplan med sin normativa karaktär representerar ett – i vår skolkultur sällan ifrågasatt – uppfattningsperspektiv som dock därmed också är ett utanför-perspektiv. Det är detta som gör det lätt för dem som inte direkt är engagerade i den konkreta praktiken att anlägga synpunkter på skolans problem och anvisa ideala lösningar. Runt skolan och undervisningen finns därför en lång historia av en retorik innehållande många *bör* och *skall*.

Som ideologiskt dokument uttrycker alltså en läroplan värderingar av skilda slag och på olika plan. Värderingarna avspeglar den tid och det samhälle i vilket den tillkommit. Samspelet mellan läroplanen och det omgivande samhället benämner Lundgren (1979) *läroplanskoden*.

Enligt Lundgren sammanfattar *den klassiska koden* utvecklingen av undervisningsidealen från antiken till de nya värderingar av individen och kunskapsinnehållet som kom fram under 1700-talet. Begreppen kulturärv och allmänbildning kan förbindas med *den klassiska koden*. Koden står också för tron på en direkt överföring (transfer), dvs att studier av grekiska, latin och matematik också utvecklade moralen och övade intellektet och minnet. Skolan skulle dessutom tradera en viss social ordning – i koden ingår ett ettänkande. *Den realistiska koden* växer fram med de naturvetenskapliga ämnena (realämnena) genombrött i skolans läroplaner – i sin tur betingat av industrialismens framväxt. I Sverige stärks under 1800-talets slut realämnena ställning i läroverken. År 1905 tillkommer realskolan liksom realgymnasiet. Lundgren pekar på två viktiga verkningar av den realistiska koden: i) en direkt länk mellan utbildning och arbetsliv skapas; ii) skolämnen ses som avbildningar av de vetenskapliga disciplinerna. Den realistiska koden förespråkar urvalsskolor. *Den moraliska koden* sätter Lundgren i samband med den allmänna folkskolans framväxt under 1800-talet med betoning på läs- och skrivkunighet. I *den rationella koden* urskiljer Lundgren idémässiga huvudlinjer: pragmatism (nyttospekter på kunskap), individualism (centering kring individen) och rationalism (rationell länk mellan pedagogisk vetenskap och utbild-

ningspolitik). Lundgren spårar den rationella kodens rötter till Dewey och dennes progressiva pedagogik, där den lärande ska göra erfarenheter och lösa problem som gör henne/honom rustad att möta framtida, okända situationer. Nu ska inte de här olika koderna tolkas så att de avlöst varandra längs skarpa skiljegränser i tiden. I den skolpolitiska diskussionen blandas istället ständigt idéer och uppfattningar som kan relateras till de olika koderna.

Grundskolans dilemma

Svenskt 1950-tal och 1960-tal beskrivs som de genomgripande skolreformerernas tid (Husén, 1961; Lundgren, 1979; Isling, 1980; Liljequist, 1994). Skolsystemet omstrukturerades då radikalt. I princip sammanfördes folkskola och realskola till en enda skola, grundskolan. Benämningen på skolformen varierade under tidens gång: medborgarskola, enhetsskola, grundskola. Skolkommissionens principbetänkande 1948, beslutet om försöksverksamhet 1950 och tillsättningen 1957 av en skolberedning med uppgift att ge den obligatoriska skolan dess slutliga form och innehåll samt den sammanfattande försöksrapporten 1959 är några viktiga hållpunkter i skeendet. Skolkommissionen lade den idémässiga grunden till den nya och demokratiska skolan, och skolberedningen konkretiserade och gestaltade själva organisationen och läroplanen. 1962 kom så den första läroplanen för grundskolan (Lgr 62).

Perioden kännetecknas av ideologiska tvister och uppslitande diskussioner i praktiskt-pedagogiska frågor. Skiljaktigheterna i synsätt är lika aktnella idag som då trots 'en fortlöpande skolreform' (jämför även Artvedson & Artvedson, 1991). Grundskoletanken i sig inrymmer en avgörande målkonflikt: Skolan har att anpassa sig till samhällsförändringarna samtidigt som skolan själv förväntas vara en förändringskraft och påverka samhällsutvecklingen. Skolans roll i samhället kan beskrivas i termer av *anpassning* och *förändring*. Uppgiften består i *reproduktion* och *produktion* av bland annat idéer, värderingar, traditioner, kunskaper, färdigheter, kultur. Utbildning ska förvalta en kultur och förmå denna, samtidigt som utbildningen ska *integrera* vad som är väsentligt som grund för en samhällsmedborgare och *differentiера* för att tillfredsställa olika

samhällsgruppers krav. På institutionsnivå och individnivå får detta sin motsvarighet i de utbildningsteoretiska termerna *socialisation* och *kvalificering*. Den förstnämnda termen står för fostran till medborgarrollen i vid mening, medan den andra står för utbildning till viss kompetens. Eleverna ska föras in i de kulturmönster, i det normsystem och de sociala förhållningssätt som finns i samhället, samtidigt som eleverna ska tillägna sig de kunskaper och färdigheter som behövs för eget personligt bruk och för samhällets fortbestånd och framåtskridande. Socialisationen förutsätts främst gälla en fostran till jämlik samverkan i olika sociala roller. Kvalificering förutsätter ytterst en konkurrens för skickning av eleverna på olika nivåer av prestationer och skicklighet. Isling (1980) skriver att grundskolan "fått de motstridiga beställningarna om *jämlik socialisation* och *ojämlik kvalificering*" (a.a., s. 336, kursivering i original). Skolan ska fostra en och samma person till både "samarbetsmänniska" och "konkurrensmänniska" (a.a., s. 333).

Med en här medveten stark generalisering kan man säga att folkskolan hade socialisationen till sin huvudsakliga uppgift, under det att realskolan och läroverket svarade för kvalificeringen. Grundskolans första läroplan (Lgr 62) blir därmed en politisk kompromissprodukt. Folkskoletanken fick slå igenom beträffande den organisatoriskt sammanhållna, niotåriga skolgången, medan realskoloförespråkarna fick prägla kursplanenehålllet (Lundgren, 1979; Unenge, 1999). De olika läroplanerna därefter återspeglar, hur man på det politiska planet vid olika tidpunkter försöker balansera den grundläggande, inbyggda konflikten genom nya anvisningar beträffande skolans organisation, kunskapsinnehåll och inre arbete. En läroplan är ju resultat av olika utredningar i kombination med förhandlingar mellan olika intressenter. De val som görs skulle därför i praktiken kunna se annorlunda ut.

Matematik och matematikämnet

I skolan ska matematikämnet lämna bidrag till den större och komplexa helhet som skisserades i föregående avsnitt. I undervisningsämnet matematik ska såväl enskilda elever som övergripande samhällsliga intressen och behov tillgodoses. Matematikundervisningen förväntas bidra till elevernas 'goda' kunskaper på skilda innehållsliga nivåer uttryckta i termer av vardagskunskap och vetenskaplig kunskap.

Läroplanskonstruktorernas svårigheter ligger i att dels avgöra vilka kunskaper och färdigheter som står sig över tid eller som behövs i en nära framtid, dels finna en lämplig organiserande princip för innehållet och undervisningen (den rationella koden). Ett exempel på det förstnämnda kan hämtas från affärsverksamheten. Personalen vid dagens snabbköpskassor behöver egentligen inte addera, subtrahera eller räkna ut hur mycket som ska betalas tillbaka vid ett köp. Maskiner klarar snabbt och säkert alla nödvändiga beräkningar. Men fordras motsvarande färdigheter i andra sammanhang? Är de förutsättningar för annat matematikkunskande? Det verkar som tiden urholkar behovet av speciella tekniker men skärper kravet på vissa andra, till exempel bedömning av rimligheten i en begärd summa.

När det i fortsättningen talas om matematik görs detta med inbörden skolämnet matematik eller kort "skolmatematik" (se även Sandahl, 1997). Det är en matematik avpassad för utbildning i matematiska begrepp och tekniker. Detta betyder inte att skolmatematiken automatiskt bör eller ska häledas ur och organiseras som den vetenskapliga disciplinen matematik ("akademisk matematik") – även om den kan göra det. Som det senare kommer att framgå ses i

läroplanssammanhang gärna skolmatematiken som en avbildning av den akademiska (alltså exempel på realistiska koden). Detta synsätt är rimligt om man vill betona att ämnet ska överföra den inom disciplinen vunnna kunskapen till nya generationer studerande – en reproducerande aspekt. Den akademiska matematiken har ju dock utöver detta som huvudsakligaste uppgift att producera ny kunskap, medan skolmatematiken som tidigare sagts tilldelas helt andra funktioner.

Skolmatematiken har också en klar inriktning mot tillämpning eller "tillämpad matematik" (nyttospekt på kunskap). Matematikens ställning och utveckling i vår kulturkrets har sitt ursprung just i det förhållandet att matematik kunde implementeras i projekt med 'praktisk' nytta. Matematiska verktyg kunde och kan användas i många lägen – från ekonomiska kalkyler till förutsägelser av projektirörelser. Matematiken som analytisk vetenskap kan via modeller och beräkningar kopplas till en fysisk verklighet på ett unikt sätt. I läroplaner världen över intar matematikämnet en täpposition bland möjliga skolämnen – en position som ämnet tilldelades redan 1760 i den första egentliga läroplanen (se t ex Howson & Wilson, 1986). Den skrevs i England av kemisten Joseph Priestley och han ansåg att matematik skulle ingå som allmän grund i alla utbildningar just för att ämnet är nyttigt och därmed viktigt. Detta synsätt återkommer ju också i målen "läsa, skriva, räkna" för folkruppföstran. Studier i matematik antas starkt bidra till och stödja såväl ett lands teknologiska utveckling som en individs totala fostran. Ämnet får sitt berättigande i läroplaner därför att matematik genom synsättet – menar man – en människans såväl vardagliga liv som arbetsliv.

Undervisningsämnet matematik definieras alltså genom läroplanen. Författarna till en läroplan har att väga samman argument för både en akademisk och en tillämpad matematik eller – vilket inte hittills hänt – argumentera för en skolmatematik av en helt annan och ny socialt och kulturellt möjlig konstruktion. Matematik är det barnen möter och ägnar sig åt inom ramen för en institutionell uppfattning av vad matematik är.

Kognitiva och affektiva mål

Rapporten *Från räkning till matematik* behandlar ingående och detaljerat de olika läro- och kursplanerna för grundskolan (Lgr 62, Lgr 69, Lgr 80 och Lpo 94). Vi hänvisar den intresserade till rapporten. Här ska endast vissa aspekter läroplanstexten dryftas.

Kognitiv kunskap

I grundskolans första kursplaner möter man ofta begreppsparret '*förståelse*' och '*färdighet*'. Spötsmålet som diskuteras är vad som bör komma först och vilken relationen mellan delarna är. Att de är delar i en större helhet ifrågasätts nämligen inte. Färdighet och förståelse var för sig utan att komma till användning ses som värdelöst kunskande. Två möjligheter föreligger och finns med i kursplanskrivningarna. En riktning anser att låter man eleverna träna på hur en viss sak görs, så kommer eleverna att senare förstå varför det fungerar. En andra skola menar att man gör inlärningsmässiga färdigheter om man först hos eleverna skapar förståelse och att eleverna sedan mot den bakgrunden lätt tränar till önskad färdighet. Här känns idéer från rörelserna "back to basics" och "the new math" igen. De senare kursplanerna – framför allt Lgr 80 – ger en bild av att elementär aritmetik till stor del är begreppsligt laddad och alltså förutsätter förståelse. Detta torde hänga samman med att Lgr 80 sätter 'eleven i centrum' på ett tydligt sätt. Förordas färdighetsutrustning ligger huvudintresset på 'kursen'.

Förståelse och färdighet betraktas alltså inte i dagsläget som skilda storheter utan ett samspel mellan dessa ses som nödvändigt. En elev bör i skolan inte enbart träna en viss färdighet, såsom multiplikationstabellen, utan också öva sig i att avgöra när den ska tillämpas och se hur den passar in i ett större matematiskt samman-

hang. Man betonar i de senare kursplanerna att kraven på vissa elementära matematiska färdigheter, s.k. vardagsräkning, inte kommer att minska genom tillgången till räknedosa eller miniräknare. En tyngdpunktstörskjutning sker i stället mot matematiska begrepp. Undervisningen får inte heller begränsas till att omfatta lösning av uppgifter som hör till vardagslivet utan även behandla lösning av mer abstrakta problem. Vikten av såväl muntlig som skriftlig redovisning framhävs i de senare läroplanerna. Sammantaget gör detta att man i dagens diskussioner ser andra indelingsgrunder av resultatvaliteter än 'färdighet och förståelse'.

En möjlig gruppering av kognitiva aspekter på kunskap är kring termerna *begreppslig* kunskap respektive *procedurmässig* kunskap. Författarna till kursplanerna skriver gärna om "begrepp och metoder (tillvägagångssätt)". Distinktionen färdighet-förståelse leder – som texterna visar – gärna till att bestämnda föreskrifter för undervisningen ställs upp. Ett övertydligt exempel är formuleringen ur Lgr 80 (s. 99): "En elev får inte börja med ett nytt moment utan tillräcklig grund från tidigare moment." Tas termen 'begrepp' med i diskussionen kan uppmärksamheten lättare riktas mot inlärningsfallet för anvisningar för undervisningen – ofta liktydligt med olika förslag på mekanisk drill – tillhandahålls beskrivningar av det som benämns "begreppsutbildning". Detta i sin tur leder fram till att man kan fästa avseende vid och möta elevernas egna spontana, vardagliga och informella föreställningar och uppfattningar av matematiska begrepp.

Begreppslig kunskap

I läroplanerna framträder – som ovanstående låter ana – olika meningar av begreppet '*begrepp*'. En är matematisk och precis, medan en andra är psykologisk och vagare.

Ett matematiskt begrepp kan presenteras formellt genom en definition. Vet man vad 'tal' och 'närliggande' innebär, fastlägger satsen - *Att ersätta ett tal med ett närliggande tal kallas att ge ett närmvärde eller att approximera*. en fix betydelse åt 'närmvärde'. (Detta och de följande exemplen är hämtade från *Matematikterminologi i skolan*.) Begreppet närmvärde byggs dock som synes på

andra begrepp och frågan uppstår vilka begrepp som ligger till grund för andra matematiska begrepp. "Grundläggande begrepp" har alltså här en alldeles speciell betydelse. Meningarna - *En helhet större än 1, som inte kan skrivas som produkten av två heltal, båda större än 1, kallas ett primtal.* - *En kvadrat är en fyrhörning där vinklarna är rätta och sidorna lika långa.* och - *För addition och multiplikation gäller den kommutativa lagen.* får illustrera hur specifika termer, egenskaper och villkor ingår och samspelar i sammanfattade begrepp. Sätts sådana satsar eller meningar samman enligt logiska tankemönster - kanske enligt "Om ..., så ..."-modell - växer begreppsfiloran ut ytterligare och omfattar även "samband". Två sådana exempel är: - *Om ett tals siffersumma (summan av de i talet ingående siffrorna) är delbar med 3, så är talet delbart med 3.* och - *Om två vinklar i en triangel är lika stora, så är triangeln likbent.* Alla sådana relationer inom ett matematiskt område (aritmetik, geometri osv.) bildar tillsammans sedan en viss struktur. Matematikens hierarkiska karaktär framträder därmed tydligt.

En andra mening eller betydelse av 'begrepp' i kursplanessammanhang handlar om vilka begrepp eleverna har om matematiska begrepp - alltså en psykologisk aspekt. Bättre benämningar finns för att markera skillnaden, exempelvis 'tankar', 'idéer', 'föreställningar' och 'uppfattningar'. Några av dessa termer förekommer också sporadiskt i ett par kursplaner dock utan att egentligen tilldelas ett klart innehåll. Uppfattningar av psykologisk art kan liksom matematiska begrepp betraktas omfatta allt från enkla, enskilda uppfattningar till mentala nätverk av olika samband mellan företeelser. I kursplanerna används alltså 'begrepp' i betydelsen för vissa funktioner (matematiska eller psykologiska) grundläggande begrepp. Carlsson (1968, s. 134) beskriver och tydliggör skillnaden från en matematikers horisont:

Var och en har nog en personlig föreställning som han faller tillbaka på när han arbetar med [det matematiska] begreppet. Givetvis kan han de abstrakta definitionerna, men de finns långt tillbaka i medvetandet. Det är /.../ idén och "funktionen" /.../ som i första hand används, inte den matematiska konstruktionen eller den formella definitionen.

Den stora principiella fråga som läroplanerna har att belysa är om matematikämnet centrala struktur ska bestämma undervisningens innehåll eller om det finns begrepp och begreppsstrukturer som har annat ursprung, kanske i elevernas vardagliga erfarenheter. Texterna berör frågan genom den diskussion som förs om "begrepps- bildning".

I samtliga läroplaner betonas med eftertryck vikten av konkretion vid begreppsutveckling. I Lgr 62 konstateras att "Kvantitetsuppfattning och matematiskt tänkande sammanhänger med erfarenheter av konkreta situationer" (s. 107). I Lgr 80 förutsätts att undervisningen utformas så konkret, att "varje elev kan förankra begreppen och förstå användningen i praktiska situationer" (s. 99). Termen begreppsutveckling ingår explicit i Lgr 69:s kursplanetext: "Ju fler konkreta situationer man kan anknyta till och ju klarare redan förvärvade begrepp är, desto lättare sker den nya begreppsutvecklingen" (s. 138).

Här antyds synsättet att begreppsutveckling innebär tankemässig konstruktion av samband mellan informationsbitar eller fäktor. Detta sambands tänkande till ett existerande begreppsligt nätverk. Sambandet kan ligga på olika abstraktionsnivå. Det kan vara lika konkret eller abstrakt som den information som ska fångas in. Sambandet kan också ligga på en högre nivå om den specifika kontext, som konkretionen ingår i, ska sättas inom parentes. Detta är en slags 'vertikal process' som innebär abstrahering och generalisering av gemensamma karaktäristika hos gjorda erfarenheter och tidigare inlärd begrepp. Verbet 'utveckla' anspekar ofta på ett mentalt nätverks växande.

Samtidigt framskymtar också en 'horisontell mekanism' som omvandlar de mentala föreställningarna till objekt i sig - ett förtingliggande. Detta syns exempelvis i verbvalet i texterna. Begrepp är något man 'har', 'förvärvar', 'skaffar sig', 'inhämtar' osv. När det gäller färdigheter - som delmängd av det som här kallas procedurkunskap - återfinns i läroplanstexterna frekvent verben 'träna' och 'öva'. Medan begrepp är något som betraktas som abstrakta, intellektuella representationer (objekt) i elevens "mentala ryggsäck" (uttrycket använt av Säljö, 1995, s. 12), så ses färdigheter som rutt- ner som ska befästas.

Procedurmässig kunskap

Procedurmässig kunskap kan sägas inrymma två åtskilda delar. En del handlar om matematikens syntax, alltså hur matematiska symboler eller tecken korrekt kan kombineras. Används uppdelningen form-innehåll för att beskriva kunskapsområden, så tillhör en förtrogenhet med symbolanvändning och symbolhantering kategorin 'form'.

Den andra delen består av regler, algoritmer eller procedurer som används då matematiska uppgifter ska lösas. Vissa typer av matematiska problem – exempelvis regula-de-tri-uppgifter, ränteuppgifter, hastighetsproblemen – löses också med schabloner som kan räknas hit. En procedur kännetecknas av att den utförs stegvis enligt ett bestämt mönster eller i en bestämd linjär sekvens. Man kan därför säga att även procedurmässig kunskap är strukturerad fast inte på samma omfattande sätt som begreppslig kunskap. Begreppslig kunskap är genomströad av samband av olika slag till skillnad från procedurkunskapens disparta rutiner. Procedurer liksom begrepp kan ligga på olika abstraktionsnivåer. Huvudräkning förutsätter sålunda andra mer eller mindre avancerade 'knepp' än vad som behövs vid standardiserad skriftlig räkning. Objektet i en procedur är oftast matematikens vanliga skrivna symboler (t ex 2, +, %), men ibland är de exempelvis diagram, klotsar, passare och linjal.

I kommentarer och anvisningar till läroplanerna betonas en bälans mellan begreppslig och procedurmässig kunskap (jämför "förståelse kontra färdighet"). Några citat ur Lgr 62 får exemplifiera detta. Där framhålls det bland annat

Om de [flertalet elever] alltför tidigt och forcerat får övergå till symbolspråk, såsom vid sifferskrivning och uppställd räkning eller – långt fram – till algebraiskt språk, kommer deras tankeoperationer att vila på osäker grund. (Lgr 62, s. 170).

och

En överdriven gruppering av tillämpningsuppgifter i t. ex. förelseproblemen och blandningsproblemen, som löses med speciella metoder,

bör [...] undvikas. I stället bör undervisningen läggas så, att eleverna vänjer sig vid att noggrant smдера uppgiften och att göra klart för sig, vad som är bekant och vad som efterfrågas (Lgr 62, s. 170).

Läroplanerna målar vidare upp en bild av skolans matematikundervisning där en grundläggande kombination av begrepps- och procedurkunskap ses som första steg mot mer högprioriterade mål för mulerade i termer av 'tillämpning' och 'problemlösning'. Det är egentligen i detta andra steg som eleverna kan möta 'vardagen', 'praktiken' och 'verkligheten'. En normativ ordning ansas här: matematiken producerar den kunskap vi alla behöver, denna kunskap reproduceras i undervisningen för att senare tillämpas i olika kontexter – som vardagsliv och arbetsliv. Nu fås alltså svaret på den stora principiella fråga som tidigare ställdes, om vad som kan vara utgångspunkter för studier i matematik. Matematiken är i samtliga läroplaner den givna utgångspunkten. Eleverna lär sig i skolan matematik genom tilldelning av förelagda, väl avgränsade och väl strukturerade mindre uppgifter som så småningom ska fögas samman i en framtida helhet.

I Lpo 94 signaleras dock delvis ett annat synsätt genom påpekandet att skolämnet kan franså som en social och kulturell konstruktion. Metaforiskt skulle man då kunna tala om att eleverna är och blir delaktiga i en viss kultur. Man kan undra om denna ståndpunkt allmer vinner terräng i debatten på grund av skolans bristande förmåga att hantera undervisningens affektiva sida. I Lgr 80 och Lpo 94 brukas sålunda i målskrivningarna termer som "tillfredsställelse" och "tilltro". Företelesen att en elevs kunskapsmässiga brister också medför känslomässiga störningar har dock observerats sedan länge. Den fransår som en förutbeständ och inneboende egenskap hos matematikämnet och matematikundervisningen.

Affektiva mål

Skolkommisjonen från 1946 fastslår redan i inledningsmeningen till avsnittet om matematik: "Matematik anses vara ett av skolans svåraste ämnen" (SOU 1948:27, s. 153). Sedan dess löper genom samtliga grundskolans kursplaner en diskussion om hur detta för-

hållande ska bemästras. Skolkommisionen fortsätter och menar att orsaken till underbetyg och kvarsitning (i realskolan) är "elevernas oförmåga att motsvara de fordringar, som ställs på dem" (a.a., s. 153). Denna bristande överensstämmelse mellan fordringar och förmåga ger – sägs det – vidare lätt upphov till "olust för räkning" och matematiken blir inte någon "rik glädjekälla" (a.a., s. 155) varken under skoltiden eller därefter. "Genom att barnen misslyckas i sin strävan att uppfylla fordringarna, får de olust inför ämnet och mister tilltron till sin förmåga" (a.a., s. 156).

Skolkommisionen har kanske i sina skrivningar påverkats av de metodiska anvisningarna till realskolans undervisningsplan, där det står:

Ett misslyckande i matematik blir nämligen i allmänhet mera påtagligt än i de flesta andra ämnen och kan därför, särskilt i ett tidigare stadium, alstra modlöshet och brist på självförtroende, olust och räddhåga, vilket i sin tur kan i fortsättningen hämma prestationsförmågan (s. 130)

Författarna till kursplanen i matematik i Lgr 62 har i sina anvisningar definitivt påverkats av tankegångarna:

Ett misslyckande i matematik blir ofta mer påtagligt än i de flesta andra ämnen och kan därför, särskilt på ett tidigt stadium, alstra olust och brist på självförtroende, vilket i fortsättningen kan hämma prestationsförmågan. Undervisningen bör därför läggas så, att om möjligt varje elev får erfara tillfredsställelsen att efter tankemöda lyckas med den förelagda uppgiften (s. 171).

Samtidigt som grundskolan övertog realskolans kursplaner så accepterades tydligen att även detta affektiva bekymmer byggdes in i undervisningen.

Lgr 69 fortsätter på samma linje i kommentarer och anvisningar: "Under den fortsatta skolgången kan /.../ kraven framstå som för höga, vilket i sin tur kan medföra ångslighet och olustkänslor" (s. 138). I det s.k. 'Basfärdighetshäftet' (1973) sägs att:

Om eleven inte klarar lärokursen i matematik, skapas en risk för att han känner vanmakt inför de alltför höga krav som kursen och läraren ställer på honom. Nya misslyckanden läggs till gamla. Olika symptom kan följa härav: avoghet mot ämnet, allmän skolleda, ångslighet, aggressivitet och hämning (s. 10).

I Lgr 80 och Lpo 94 har man gjort antitesen till uppkomsten av fämningsskap, olust och ångslan till tydliga övergripande ämnesmål:

Den [undervisningen] skall vara tillrättalagd så, att eleverna upptäcker behovet av att kunna använda matematiken och får känna tillfredsställelsen av att kunna tillämpa inlärd färdigheter. /.../ Matematiken blir då /.../ en källa till nytta och glädje (Lgr 80, s. 99).

respektive

Utbildningen skall utformas så att eleverna förstår värdet av att behärska grundläggande matematik och får tilltro till sin förmåga att lära sig och använda matematik (Lpo 94, s. 33).

Forordningar och krav – enligt uttrycken i Lgr 62 och Lgr 69 – är ju dock något som skolan på samhällets uppdrag ställer upp i samband med provgivning och betygsättning. Här berörs alltså själva gränssnittet – och därmed den inbyggda konflikten – mellan socialisation och kvalificering. Upplevelser i detta gränsländ kan hos vissa elever leda till 'själsliga skavsår'. I dagens grundskola sänts ju terminsbetyg först fr.o.m. skolar 8, men fenomenet äger ändå giltighet under elevernas hela skoltid om ordet 'forordningar' – i decentraliseringsens namn – ersätts med det mjukare 'förväntningar'. Lärare, föräldrar och kamrater har förväntningar på den enskilde eleven – tillsammans med dem som eleven ställer på sig själv. En elevs 'förväntningar' kan alltså sättas i relation till sådana olika förväntningar.

För att undvika negativa känslomässiga effekter av undervisningen framhålls särskilt i de tidigare kursplanerna att eleverna ska uppfatta förelagda uppgifter som lätta och att eleverna också ska lyckas lösa dem. I de senare kursplanerna talas det – för att undvika

blockering och osäkerhet – om betydelsen av att "elevernas intresse och behov" tillgodoses, väcks och vidmakthålls.

I Lpo 94 och kursplanerna har steget tagits fullt ut då man sätter upp exempelvis följande mål att sträva efter: Varje elev ska utveckla sitt eget sätt att lära, ett allt större ansvar för sina studier, förmågan att själv bedöma sina resultat och få tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan att lära sig matematik. Avståndet i dessa aktuella skrivningar till gårdagens text i realskolans kursplan kan inte vara större. Man framhåller då:

Med hänsyn därtill, att matematik för många lärjungar är ett svårt ämne, måste undervisningen däri handhas med tålmod och behärskning, om icke lärjungarnas intresse för ämnet skall slappna eller undervisningens resultat äventyras (Metodiska anvisningar, 1935, s. 130).

Frågan är om denna omorientering från ett tydligt läraragerande till ett lika tydligt elevagerande och elevengagemang löser matematikundervisningen från sin stigmatiserande prägel, så länge själva innehållet i och uppläggningsen av skolmatematiken följer samma mönster som tidigare. Det avgörande är hur "att lära sig" tolkas och ges konkret innebörd. I dagens debatt börjar det ifrågasättas om skolämnet ska presenteras på det traditionella, hierarkiska eller linjära sätt som läroplanerna framhåller (se exempelvis Sandahl & Ulenge, 1996; Wistedt & Martinsson, 1994). Det strikta förstsedan-perspektivet skulle kunna bytas ut mot ett helhetsinspirerat, som i större utsträckning bygger på elevens tanke- och erfarenhetsvärld (ett nytt konstruktivistiskt perspektiv) eller på elevens deltagande i ett ständigt pågående matematiskt samtal (ett sociokulturellt perspektiv). Vi återkommer i ett senare avsnitt till dessa begrepp.

Problemlösning

Ett av de viktigaste allmänna målen för den obligatoriska skolan är – enligt samtliga läroplaner – att ge eleverna en handlingsberedskap för livet utanför och efter skolan. För matematikundervisningens del innebär detta att eleverna genom den skaffar sig sådana kunskaper och färdigheter, som de exempelvis kan ha "nyttja" av i olika sammanhang, samt får erfarenheter av olika situationer, där dessa kunskaper "tillämpas". Sättet att undervisningsmässigt ordna detta är att eleverna under matematiklektionerna får "lösa problem". Problemlösning är därför ett viktigt fokus i läro- och kursplanerna. Termerna problem och problemlösning används emellertid i flera olika betydelser.

I 1919 är undervisningsplan för folkskolan återfins termerna över huvud taget inte. Där talas det enbart om "uppgifter" eller "tillämpningsuppgifter" som ska lösas. Anvisningarna till realskolans kursplan upptar likaså "uppgifter" och "tillämpningar" men inleder samtidigt tillämpningsuppgifterna i olika typer av "problem" exempelvis rörelseproblem, blandningsproblem. I kursplanen för försöksverksamheten med nioårig enhetsskolan (*Timplaner och huvudmoment*, 1955) används en stor uppsättning med begrepp: uppgifter, problem, övningsuppgifter, räkneppgifter, räkneproblem, tillämpningsuppgifter, tillämpningsproblem, problemtyper, benämnda uppgifter. I Lgr 62 använder författarna omväxlande termerna "problem", "uppgifter" och "tillämpningsuppgifter". Benämningarna "problemlösning" och "problembehandling" förekommer också. I de senare läroplanerna – framför allt i Lgr 80 – är "problem" och "problemlösning" högfrekventa ord. Lgr 69 tar även in begreppet "matematisk modell" då problemlösning diskuteras. I

Lgr 80 och Lpo 94 kopplas problemlösning gärna samman med "undersökande" aktiviteter.

Det finns alltså skäl att närmare studera den något brokiga terminologin och därmed problemlösningens syfte, innehåll och funktion.

Objektet vid problemlösning

Problemlösning ses alltså genomgående som en central aktivitet för alla elever i matematikundervisningen. Frits Wigforss talade tidigt om problemen och problemlösning i skolans matematikundervisning. Han sammanfattade i en mening sin syn på problemvalet – en syn som något bearbetad fortfarande går igenom läroplanerna. Citatet återfinns i Lex. Wigforss, & Nilsson (1952, s. 11):

Man kan säga att en uppgift försvarar sin plats vid undervisningen, om den innehåller en beräkning, som sannolikt kommer att möta i livet efter skolans slut, om den är behövlig för uppövande av den matematiska räknefärdigheten, om den ger värdefull realkunskap, om den intresserar eleverna och om den på ett gott sätt påverkar deras tanke- och viljeliv.

Vad är då objektet eller centrumet i problemlösning? Eller med andra ord: Vad är ett problem? En ren beräkningsuppgift ("sifferuppgift" enligt 1919 års undervisningsplan) som en elev räknar i övningsstycke kan eventuellt ses som en enkel form av problemlösning – en förelagd uppgift existerar och ett resultat ska räknas fram. Benämnda uppgifter (uppgifter med text, 'lästäl' eller "sakuppgifter" som det står 1919 års undervisningsplan) uppfattas dock ofast som problem. Texten innehåller en fråga som ska besvaras. Eleven måste först tolka vad problemet förutsätter och kräver för att sedan avgöra hur en lösning kan bestämmas. Eleven ställs inför en utmaning. Problemlösning kan inte börja utan att en sådan genererande fråga eller uppmaning formuleras explicit eller implicit. Frågan är nödvändig för problemlösning, men den är inte tillräcklig.

Den som möter frågan i problemet måste dessutom vara villig att försöka och finna en lösning. Problemet måste ha någon personlig relevans. Innehållet har kanske betydelse för elevernas nu, dvs.

har anknytning till deras liv, livsvillkor och intressen under skolåren. Men skolans uppgift är ju också att hjälpa eleverna att vidga fältet för vad som är personligt relevant. Skolarbetet ska breda, fördjupa och väcka elevernas insikt om att vad som är samhällsreligt relevant (exempelvis under etiketten "nyttigt att kunna") också är personligt relevant. De flesta sociala, ekonomiska, politiska och kulturella frågor är eller blir så småningom även elevernas frågor – frågor eller problem som kan studeras i skolans undervisning ur matematiskt perspektiv.

Enligt Lgr 80 ska problemet också innebära en personlig, intellektuell prövning eller utmaning. Ett problem ska inte vara av rutinkaraktär och kunna lösas efter ett schablonartat mönster. Problemet reduceras då till enkel typuppgift eller räknövnings för just den eleven. Metaforiskt kan man säga att vid problemlösning ska nya och okända stigar beträdas på vägen till målet (lösningen och svaret). Bland vill man förstärka denna senare aspekt genom att man använder uttrycken "äkta problem" eller "verkligt problem" – äkta och verkligt står här i motsats till konstlat och 'fejkat'. Ordvalet kan dock leda tankarna åt annat håll om man förknippar 'verkligt' med 'realistiskt' eller 'i vardagen (verkligheten) förekommande'. Problem ska alltså – enligt skrivningarna i läroplanerna – ses i förhållande till den problemlösnings personen men också till själva kursplanen och dess specificerande föreskrifter om rutiner och algoritmer.

Denna relativism försöker man i dagsläget komma ifrån genom att se ett matematiskt problem eller en matematisk situation (Lpo 94) såväl som startpunkt för resonemang och undersökande som källa för formulerande av frågor och problem. 'Problemet' står här för en helhet (en övergripande frågeställning) ikaväl som en av helhetens delar (delproblem med dellösningar). Syftet är att därmed skapa en kontext som i större eller mindre utsträckning påverkar uppkomsten eller genererandet av personligt engagemang. Attityd och aspiration hos den enskilde eleven avgör vad som bidrar till att en frågeställning uppfattas som ett problem.

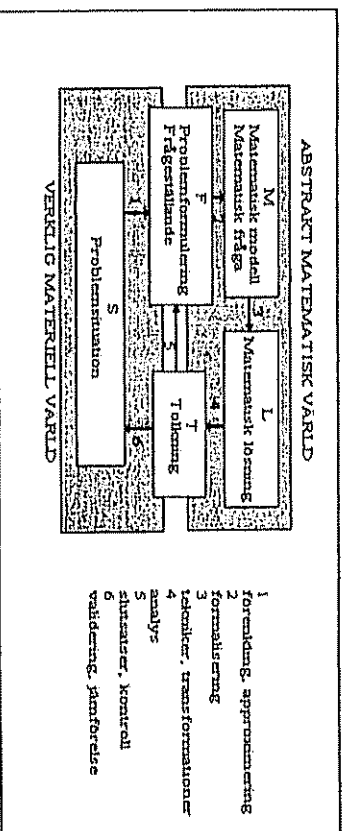
Här blir det nu tidpunkt att nämna något om "matematisk modell" – ett begrepp som explicit förekommer i Lgr 69 och i kursplanen till Lpo 94.

Matematisk modell

Modell förstås ofast i vardagsspråket som en förminskning eller förenkling av ett objekt. En modell av en bil eller en båt kan dela många egenskaper med originalen: samma proportioner, samma färg och kanske också samma sätt att fungera. Objektet som modell kan ofta studeras på ett enklare och billigare sätt än i full skala. Fysiska modeller är därför värdefulla verktyg på många tekniska och industriella områden.

Teoretiska modeller kan också konstrueras. En teoretisk modell av ett fenomen eller företeelse är en uppsättning regler eller lagar som mer eller mindre precis representerar fenomenet. Är dessa regler och lagar av matematisk natur så talar man om en matematisk modell. Den matematiska modellen utgör en matematisk struktur som approximerar karaktäristika hos fenomenet. Några sådana strukturer som passar för 'modellering' är exempelvis grafer, diagram, ekvationer eller formler, index, tabeller, algoritmer. Matematisk modellering inkluderar problemlösning. Det som tillkommer är problemlösning.

Arbetet med en matematisk modell omfattar tre tydliga processer: först ska förhållanden i ett konkret problem ges en matematisk dräkt (formalisering, representation, inkodning), sedan ska den matematiska 'maskinen' producera en lösning som till sist ska tolkas (avformaliseras, dekodas) relativt det ursprungliga problemet. Följande figur illustrerar och sammanfattar olika steg och faser i den utökade problemlösningssmodellen.



Figur 2.1. Faser och steg i en matematisk modell.

Fas S omfattar den ursprungliga och engagerande problemsituationen. Först observeras vissa förhållanden som dessutom kanske identifieras (steg 1). Föreligger inte någon explicit fråga, måste problemlösningsformulering och tydliga frågor ställas (fas F). Frågan eller frågorna 'översätts' (steg 2) till matematikspråk (fas M). När den matematiska frågan är ställd, kan en matematisk lösning sökas (steg 3). Den matematiska lösningen (fas L) analyseras (steg 4) och tolkas (fas T) både mot den ställda frågan (steg 5) och den ursprungliga problemsituationen (steg 6). Lösningen – eventuellt modifierad – används eller tillämpas till sist i själva utgångsläget.

Modellen har två sidor – en sida ut mot den materiella världen och en in mot den formella matematiken. I det förstnämnda fallet sägs i läroplanerna att uppgifterna ska hämtas från vardagslivet och ha praktisk anknytning eller också kategoriseras problemen som exempelvis affärs-, ränte-, hastighets-, blandningsproblem. I det andra fallet pekas ett lämpligt förfarande ut som förslagsvis regulär, ekvationslösning. Samtidigt som vissa lösningsförfaranden av rutinkaraktär rekommenderas, så varnas det för att problemlösningen kan mekaniseras (algoritiseras) om eleverna får öva in särskilda strategier för att lösa vissa typer av problem. Skolkommissionen från 1946 menade att "ensidig specialträning" skulle förhindras i undervisningen; i Lgr 62 anses att "överdriven gruppering av tillämpningsuppgifter" och "tanklöst bruk av schablonmetoder" bör undvikas; i Lgr 69 uttalas på ett liknande sätt att inget "omfattande arbete åt klassificering av problem i olika områden" bör äga rum. Skrivningen i Lgr 80 är mer komplex och också ibland motsägelsefull eftersom problemlösning ses – som redan framhållits – relativt eleven. Det anses dock önskvärt att eleverna löser vissa uppgifter med "rutinkunskaper". I kursplanen till Lpo 94 framhålls däremot att eleven ska "kritiskt granska modellernas förutsättningar, begränsningar och användning". Utvecklingslinjen är den att man i läroplanerna allt starkare betonar att problemen ska ha öppen karaktär, dvs. inte vara tillrättalagda för en viss typ av hantering.

Hör den givna problemsituationen till ett sammanhang som är ökänt för eleverna ses inte detta som ett hinder. Wigforss anger i citatet som inleder detta avsnitt att problemen också ska kunna ge

"värdefull realkunskap". Matematikundervisningen ses i samtliga läroplaner som en möjlighet att vidga elevernas verkliga samsynsunderlag i form av ökad samhälls- och naturvetenskaplig orientering.

Problemlösning som kognitiv process

Faserna F och T i föregående figur markerar bryggor mellan den materiella världen och den abstrakta matematiska världen. Den som bildligt går över dessa bryggor bör besitta en del *strategiska* färdigheter för att vara framgångsrik vid representationen av den materiella världen i den matematiska och vid återtolkningen från den matematiska till den materiella. Exempel på några sådana färdigheter är formulering av frågor, identifiering av framträdande variabler och begründande av tänkbara samband mellan variablerna (kanske i ekvationsform). När väl den matematiska modellen är vald förutsätter fortsättningen *tekniska* färdigheter. Sådana färdigheter kan exempelvis vara korrekt utförande av en multiplikation och god teknik för lösandet av en ekvation. Steg 3 i figuren kan förknippas med traditionell "räkning". De strategiska färdigheterna är subjektiva och starkt knutna till den problemlösande personen. Skillnader i strategiska färdigheter bidrar till en uppspaltning i goda och dåliga problemlösare. De tekniska färdigheterna kan göras synliga på ett objektivt sätt och diskuteras vägas mot skalan rätt/fel.

De olika läroplanerna ger bilden av 'att lösa problem' innebära 'att ge sig själv bra frågor eller uppmaningar'. I Lgr 62 sägs att eleven ska "noggrant studera uppgiften och göra klart för sig vad som är bekant och vad som efterfrågas" (Lgr 62, s. 171). Detta sammantaget gör att "man förstår problemet" enligt terminologin i Lgr 80. Problemlösningen fortsätter därefter med stegen 'gör upp en plan', 'genomför planen' och 'se tillbaka'. Dessa kognitiva och metakognitiva led i problemlösning känns igen som Polyas välkända schema för problemlösning.

I kursplanen till Lpo 94 anläggs ett annat synsätt och skrivsätt. Man talar där allmänt om "problemlösning förmåga". Men har man väl börjat att diskutera i termer av förmåga så spaltas i analysstyftet en allmän förmåga lärt upp i del- eller underförmågor eller funktioner som ska "utvecklas" i undervisningen. I texten hittar man pa-

ralleller mellan olika sådana kognitiva förmågor och ovan antydda kognitiva led eller processer vid problemlösning. Kedjan "utveckla - förstå - kunna använda" är generellt relaterad till exempelvis olika matematiska begrepp och återkommer därför ofta i kursplanen till Lpo 94, medan det i tidigare läroplaner istället finns tydliga skrivningar om olika specifika komponenter i elevernas görande vid problemlösning.

Detta hänger samman med att läroplanerna återspeglar olika perspektiv på förhållandet mellan problemlösning och övrigt lärande i matematik (se exempelvis Wyrndham, 1993). I Lgr 69 och tidigare läroplaner återfinns synsättet att behärskar en elev de nödvändiga matematiska verktygen i form av tekniker (alltså steg 3 i den tidigare figuren) så är också detta tillräckligt för att eleven ska kunna lösa problem eller uppgifter som formuleringen ju ofast var. Problemlösning sågs som det övergripande målet för undervisningen i matematik. Man undervisade i matematik *för* problemlösning.

I Lgr 80 införts problemlösning som huvudmoment, dvs man skulle också undervisa *om* problemlösning. Frågorna fanns där i läroboken färdigformulerade och det gällde att även välja och tillämpa lämpligt räknesätt innan frågan kunde besvaras. Detta perspektiv omfatar ofast enbart cykeln F-M-L-T-F i den tidigare figuren.

I kursplanen till Lpo 94 betraktas problemlösning även som ett medel att nå matematiskt tänkande, dvs. ett perspektiv som representeras av hela den tidigare ritade figuren. Omloppet från data till formalisering till beräkning till tillämpning upprepas varhelst än matematik används. "Problemlösning kan ses som motor eller drivkraft i lärandet" (Nämndaren Tema: *Matematik - ett kommunikationsämne*, s. 70). *Genom problemlösning* lär man sig bland annat att utveckla matematiska tankar och idéer, inse värdet av det matematiska symbolspråket, upptäcka samband och "förstå och kunna använda logiska resonemang".

De tre prepositionerna *för*, *om* och *genom* kan relateras till olika pedagogiska skolor. Vi ska göra detta i ett senare kapitel. I mycket grova drag ses den problemlösande eleven som härnare i för-perspektivet, som informationsbehandlare i om-perspektivet och som tänkare i genom-perspektivet.

Problemlösning som arbetssätt

Problemlösning framträder i läroplanerna också i betydelsen arbets-sätt och ses då som exempel på ett elevaktivt arbetssätt. Eleverna antas lära sig själva söka sin kunskap. Denna färdighet har i de se-nare läroplanerna hög prioritet eftersom den anses värdefull i ett samhälle där både samhälle och kunskapsproduktion hela tiden är stradda i förändring.

Skolkommissionen anslår tonen då man konstaterar att tillämp-ningarna i huvudsak ska vara av praktisk art, ge värdefull intellek-tuell övning och vidare att:

Läraren kan låta eleverna öva sig i *kritisk diskussion* av därför lämpli-ga problem och låta dem försöka att självständigt arbeta sig fram till lösningen (SOU 1948: 27, s. 155, kursivering i original).

I Lgr 62 betonas vikten av att vid genomgångar "eleverna aktivt medverkar med synpunkter och uppslag" och att "eleverna väntas vid noggrannhet, kritiskt tänkande och självkontroll". Detta uppre-pas i Lgr 69 och där framhålls tydligt att eleverna ska arbeta såväl självständigt som i mindre grupper. I Lgr 80 lyfts det undersökande arbetssättet fram samtidigt som man accentuerar språkets stora be-tydelse vid inläring, därför blir "[a]tt tala matematik ett viktigt led i undervisningen" (s. 100). I kursplanen till Lpo 94 fastslås:

Undervisningen i matematikskallje eleverna möjlighet att utöva och kommunicera matematik i meningsfulla och relevanta situationer i ett aktivt och öppet sökande efter förståelse, nya insikter och lösningar på olika problem (s. 34).

Bakom denna retorik kan flera frågor spåras. Detta med att den lä-rande själv ställer frågor utifrån en konkret situation återspeglar en induktiv undervisningsmetod med rötter i antiken (Sokrates och hans heuristiska metod). I början av 1900-talet verkade Dewey för tanken att se på barnet som en aktivt kunskaps sökande person och därmed för en åskådlig och verklighetsanknuten undervisning. Den kände L Gottfrid Sjöholm citerad i Ising (1980) ger kärnan i denna pedagogik:

Arbetskola. Det var [...] att lära genom att göra, det var handens ar-bete, det var den andliga brotningen med problemen, det var skolan som ett laboratorium och inte ett auditorium (a.a., s. 160).

Under efterkrigstiden har Piaget fortsatt att förespråka denna an-sats. Handling är ett nödvändigt villkor för tanken. Eleven ska ope-rera på omgivningen, både konkret på tingen och språkligt på de sociala relationerna. Eleverna behöver därför få tid att analysera och ifrågasätta den egna erfarenheten, att jämföra sina uppfattning-ar med andras, att utmana sina tankar mot experiment och uppställ-da samband.

Problemlösning ger eleverna tillfälle att tala matematik med varandra, att argumentera för olika lösningar och att lyssna på and-ras argument. Aktuell forskning (se exempelvis Wistedt, 1996) har dock visat att detta inte är tillfyllt. Elevernas tankar måste vidare-utvecklas över denna första personliga nivå. Risk föreligger annars att eleverna stannar upp inför ett specifikt fall och upprepar den förståelse eller brist på förståelse de redan har. Felaktig förståelse utmanas inte utan bekräftas. Lärarens uppgift är att bemöda sig förstå vad eleven säger eller försöker uttrycka och hjälpa eleven att tydliggöra och fördjupa sina tankar. Eleverna behöver få tillgång till ett tänkande som möjliggör bildande av kategorier och som läg-ger grunden för analys och generalisering.